Una proposta di convergenza per la successione di Collatz: la Congettura personalizzata

ARDITO Nicola

n.ardito52@gmail.com oppure n_ardito@alice.it

BARI – ITALIA

16 Settembre 2025

Abstract

Si propone una congettura alternativa alla classica formulazione della successione di Collatz basata sull'analisi del rapporto tra passaggi pari e dispari. Si dimostra che, salvo casi eccezionali, in ogni **iterazione (**intesa come insieme di passaggi dispari e di passaggi pari dipendente dal numero iniziale della stessa iterazione) il numero totale di passaggi pari *b* eccede quello dei dispari *a* di almeno una o due unità, portando dopo un certo numero di iterazioni alla disuguaglianza $\frac{3^a \cdot N}{2^b} < 1$, che implica la convergenza della successione verso 1.

1. Introduzione

La successione di Collatz è definita per ogni intero positivo Ncome segue:

- Se Nè pari: $N \to N/2$
- Se Nè dispari: $N \to 3N + 1$

La congettura afferma che, indipendentemente dal valore iniziale *N*, la successione converge sempre ad **1**. Nonostante la sua apparente semplicità, nessuna dimostrazione generale è stata ancora trovata.
In questo articolo viene presentata una nuova congettura equivalente alla congettura canonica di Collatz. Infatti, di seguito la congettura di Collatz da me personalizzata sarà applicata in un modo più veloce considerando solo numeri naturali N modulo 4 e che la successione di questi numeri (dopo un numero iniziale che può essere anche pari mod. 4) si riduce alla successione dei soli numeri dispari ≡ 1 mod. 4 e ≡ 3 mod. 4. Questo modo di procedere porta agli stessi risultati della successione di Collatz canonica.

2. Successione personalizzata e iterazioni

Si propone una visione alternativa della successione, basata su **iterazioni composte da un certo numero di**:

- Passaggi dispari (applicazione di $3N + 1$)
- Passaggi pari (divisione per 2)

dipendente dal numero iniziale della stessa iterazione. Questa struttura consente di analizzare il comportamento globale della successione in termini di crescita e decrescita.

3. La mia successione personalizzata e la sua spezzata crescente aperta e semplice

Lemma (casi eccezionali da trattare separatamente nella mia successione personalizzata)
La successione personalizzata definita in seguito si applica a tutti i numeri interi positivi N, **ad eccezione** dei seguenti tre casi che devono essere gestiti all'inizio di ogni iterazione della successione (ad esempio di un qualsiasi programma di calcolo tipo python, ecc.):

1. **Numeri potenze di 2:** $N = 2^p$ con $p \geq 1$;
2. **Numeri della forma** $N = (2^p - 1)/3$**:** con $p \geq 2$ e p pari, cioè l'insieme $\{1; 5; 21; 85; 341; 1365; \dots\}$;
3. **Numero** $N = 3$**.**

Per ciascun caso valgono le seguenti proprietà:

- **(1)** Se $N = 2^p$, allora la sequenza converge a 1 con **0 passi dispari** e $\boldsymbol{p}$ **passi pari** (divisioni successive per 2) e in questa iterazione iniziale il numero di passi dispari è $a_1 = 0$ e il numero di passi pari è $b_1 = p$, quindi la differenza $b_1 - a_1$ è aumentata di p.
- **(2)** Se $N = \frac{2^p - 1}{3}$ con $p \geq 2$ *e* p pari, allora applicando un solo passaggio dispari si ottiene $3N + 1 = 2^p$. Da qui la sequenza converge a 1 dopo **1 passo dispari** e $\boldsymbol{p}$ **passi pari** e in questa iterazione ***i*** il numero di passi dispari è $a_i = 1$ e il numero di passi pari è $b_i = p$, quindi la differenza $b_\mathrm{i} - a_\mathrm{i}$ è aumentata di $p - 1$.
- **(3)** Se $N = 3$, la sequenza canonica è

  $$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1,$$

  per cui la convergenza a 1 avviene con **2 passi dispari** e **5 passi pari** in questa iterazione ***i*** il numero di passi dispari è $a_i = 2$ e il numero di passi pari è $b_i = 5$, quindi la differenza $b_\mathrm{i} - a_\mathrm{i}$ è aumentata di 3.

Osservazioni fondamentali

Poiché $N = 2^p$ essendo pari deve essere il numero iniziale della prima iterazione nella successione personalizzata mentre tutti i **numeri iniziali delle iterazioni successive alla prima** sono sempre **numeri dispari** necessariamente **congruo 1 oppure 3 modulo 4.**

Inoltre, i numeri $N = \frac{2^p - 1}{3}$ con $p \geq 2$ e p pari (non sono numerosi) possono essere numeri iniziali di una qualunque iterazione sia iniziale che intermedia in cui la successione converge subito ad 1. In effetti il numero $N = 5 = \frac{2^4 - 1}{3}$ con p=4 è un numero che risulta sempre nell'ultima iterazione (la maggior parte delle volte non compare nell'ultima iterazione della successione perché segue il numero $N = 3$ che lo "oscura") che converge ad 1 con 1 passaggi dispari e 4 passaggi pari.

Invece il numero $N = 3$ è un numero che risulta sempre nell'ultima iterazione della successione che converge ad 1 con 2 passaggi dispari e 5 passaggi pari che incorpora il numero $N = 5$ che è il secondo numero del tipo congruo 1 modulo 4 (il primo è 1) mentre il numero $N = 3$ è il primo numero del tipo congruo 3 modulo 4.

Nella successione personalizzata, dopo un possibile numero iniziale pari, **tutta le successive iterazioni hanno come numero iniziale solo numeri dispari congrui 1 oppure 3 modulo 4**, tranne le eccezioni esplicite indicate sopra nel lemma.

Esaminiamo con i teoremi seguenti come si sviluppa la mia successione personalizzata in ogni iterazione considerando i 4 tipi dei numeri N congrui mod. 4 escludendo i tre casi eccezionali visti precedentemente nel lemma.

Teorema 3.1 (caso $N \equiv 0 (\mathrm{mod} 4)$)

Sia N un intero positivo tale che $N \equiv 0\ (\mathrm{mod} 4)$. Allora si può scrivere $N = 2^p(2k + 1)$ con $p \geq 2$ e $k \geq 0$ interi; eseguendo i primi p passi della successione di Collatz (cioè dividendo per 2 ogni volta che il termine è pari) si ottiene il termine $N[p] = 2k + 1$, che è dispari e strettamente minore di N. Inoltre $2k + 1 \equiv 1(\mathrm{mod} 4)$ se k è pari e $2k + 1 \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$ se k è dispari; in questa fase iniziale il numero di passi dispari è $a_1 = 0$ e il numero di passi pari è $b_1 = p$, quindi la differenza $b_1 - a_1$ è aumentata di p.

Dimostrazione:
Poiché $N \equiv 0(\mathrm{mod}4)$, N è pari e almeno divisibile per 4. Esiste quindi una scomposizione $N = 2^p m$ con $p \geq 2$ e m dispari. Scrivendo $m = 2k + 1$ con $k \geq 0$ otteniamo

$$N = 2^p(2k + 1).$$

Nella successione di Collatz, se il termine è pari si applica l'operazione $n \mapsto n/2$. Applicando questa operazione p volte di seguito al numero $N = 2^p(2k + 1)$ si elimina il fattore 2^p e si ottiene

$$N^{[p]} = \frac{N}{2^p} = 2k + 1.$$

Perché $p \geq 2$ abbiamo $2^p \geq 4$, quindi

$$N^{[p]} = 2k + 1 = \frac{N}{2^p} < \frac{N}{4} < N,$$

cioè il termine ottenuto dopo i p passi è dispari ed è strettamente minore del valore iniziale N.

2. Per quanto riguarda la congruenza modulo 4 del nuovo termine iniziale della iterazione successiva: se k è pari, $k = 2h$ e $2k + 1 = 4h + 1 \equiv 1(\mathrm{mod}4)$; se k è dispari, $k = 2h + 1$ e $2k + 1 = 4h + 3 \equiv 3(\mathrm{mod}4)$. Quindi $2k + 1 \equiv 1(\mathrm{mod}4)$ quando k è pari e $2k + 1 \equiv 3(\mathrm{mod}4)$ quando k è dispari. Infine, in questi primi p passi non è stato mai applicato l'operatore dispari $3n + 1$: sono stati soltanto p passi pari (divisioni per 2). Pertanto il conteggio dei passi nella sola iterazione iniziale è $a_1 = 0$ (passi dispari) e $b_1 = p$ (passi pari), e la differenza iniziale $b_1 - a_1$ è di p rispetto alla situazione iniziale in cui, contando solo questa singola mossa, la differenza era 0. C.v.d.

<u>Teorema 3.2</u> (caso $N \equiv 2(\mathbf{mod}4)$)
Sia N un numero naturale pari tale che $N \equiv 2(\mathrm{mod}4)$. Allora N può essere scritto nella forma

$$N = 4k + 2 \qquad (k \geq 0).$$

Il termine successivo della successione di Collatz dopo un passaggio pari (cioè applicando la regola $n \mapsto \frac{n}{2}$ una sola volta) è

$$N_1 = \frac{N}{2} = 2k + 1,$$

che è un numero dispari strettamente minore di N. Inoltre:

1. Se k è pari allora $2k + 1 \equiv 1(\mathrm{mod}4)$.
2. Se k è dispari allora $2k + 1 \equiv 3(\mathrm{mod}4)$.
3. In questa iterazione (da N a N_1) i passaggi dispari sono $a_1 = 0$ e i passaggi pari sono $b_1 = 1$; quindi la differenza $b_1 - a_1$ è aumentata di 1.

Dimostrazione

1. Poiché $N \equiv 2(\mathrm{mod}4)$, per definizione esiste $k \in \mathbb{N}$ con $N = 4k + 2$. Dividendo per 2 otteniamo

$$N_1 = \frac{N}{2} = 2k + 1.$$

Poiché $2k + 1$ è dispari. Confrontando N_1 con N:

$$N - N_1 = (4k + 2) - (2k + 1) = 2k + 1 > 0,$$

quindi $N_1 < N$.

3. Valutiamo le congruenze modulo 4:
   - Se k è pari, $k = 2m$ per qualche m; allora
   $$2k + 1 = 2(2m) + 1 = 4m + 1 \equiv 1(\mathrm{mod}4).$$
   - Se k è dispari, $k = 2m + 1$; allora
   $$2k + 1 = 2(2m + 1) + 1 = 4m + 3 \equiv 3(\mathrm{mod}4).$$
4. Contiamo i passaggi pari e dispari nella singola iterazione $N \to N_1$. Partiamo da un numero pari N e applichiamo una sola volta la regola pari $n \mapsto n/2$; dunque in questa iterazione si ha un passaggio pari ($b_1 = 1$) e nessun passaggio dispari ($a_1 = 0$). Quindi la differenza $b_1 - a_1 = 1$, cioè è aumentata di una unità rispetto alla situazione iniziale in cui, contando solo questa singola mossa, la differenza era 0. C.v.d.

Teorema 3.3 (terzo tipo, $N \equiv 1 (\mathbf{mod} 4)$; cambio di orbita e conservazione del bilancio dei passi)
Sia $N = 4h_0 + 1$ un intero positivo e sia $N' = h_0$. Allora:

1. Dopo un passo dispari seguito da due passi pari applicati a N si ottiene
$$N[3] = 3h_0 + 1.$$
2. Se h_0 è dispari, allora N e N' sono isopath: N raggiunge $N[3] = 3h_0 + 1$ in tre passi (D, P, P) mentre N' raggiunge $N[3] = 3h_0 + 1$ in un solo passo (D). Le loro orbite confluiscono in $N[3]$ e, pertanto, qualunque proprietà di convergenza valida per uno dei tre numeri N, N', $N[3]$ vale anche per gli altri due. Questa situazione la chiamo "cambio di orbita".
3. Nel caso h_0 dispari la sostituzione di $N[3] = 3h_0 + 1$ con $N' = h_0$ corrisponde all'eliminazione formale di un passo dispari nella descrizione temporale della traiettoria, ma non altera il bilancio complessivo dei passi pari e dispari rispetto alla successione canonica di Collatz.
4. Se h_0 è pari, non si verifica il cambio di orbita e la successione continua in modo canonico da N con $N[3] = 3h_0 + 1$ in tre passi (D, P, P) senza cambio di orbita.

Dimostrazione
Sia $N = 4h_0 + 1$.
1. Calcolo diretto di $N[3]$. Applicando la regola dispari a N abbiamo
$$3N + 1 = 3(4h_0 + 1) + 1 = 12h_0 + 4 = 4(3h_0 + 1).$$
Poiché questo numero è multiplo di 4, applicando due divisioni per 2 (due passi pari) otteniamo
$$\frac{4(3h_0 + 1)}{2^2} = 3h_0 + 1.$$
Quindi il termine ottenuto dopo i tre passi (D, P, P) è
$$N[3] = 3h_0 + 1.$$

2. Intersezione con $N' = h_0$ quando h_0 è dispari
Se h_0 è dispari, applicando la regola dispari a N' otteniamo subito
$$N'[1] = 3h_0 + 1 = N[3].$$

Quindi N raggiunge $N[3]$ in tre passi mentre N' lo raggiunge in uno solo: le orbite confluiscono in $N[3]$ e quindi N, N' e $N[3]$ sono isopath.
3. Esplicitazione dell'"eliminazione" del passo dispari
Per rendere la situazione più esplicita, osserviamo che h_0 è direttamente la preimmagine dispari di $3h_0 + 1$ rispetto all'operazione dispari inversa di Collatz:
$$h_0 = \frac{(3h_0 + 1) - 1}{3}.$$

Questa uguaglianza mostra che, nel passaggio da N a $N[3]$, il contributo dispari che porta a $3h_0 + 1$ è lo stesso passo dispari che, se si parte da N', viene eseguito come primo passo. Di conseguenza, sostituendo $N[3] = 3h_0 + 1$ con $N' = h_0$ nella descrizione della traiettoria, si elimina formalmente il passo dispari iniziale nella cronologia di N (per cui si conteggiano solo i 2 passi dispari) perché quel passo risulterà "incorporato" come primo passo dispari della iterazione successiva che parte da N'.
Conservazione del bilancio passi (interpretazione rigorosa)
Confrontiamo i conteggi fino al termine d'intersezione $N[3]$:

- Percorso da N fino a N': sequenza di tipi di passi P, P, quindi
  #dispari $= 0$, #pari $= 2$.
- Percorso da N' fino a $N[3]$: sequenza D, quindi
  #dispari $= 1$, #pari $= 0$
- Percorso da N fino a $N[3]$: sequenza D, P, P, quindi
  #dispari $= 1$, #pari $= 2$

La formula $h_0 = \frac{(3h_0+1)-1}{3}$ mostra che il passo dispari presente in entrambe le descrizioni è lo stesso evento aritmetico: non scompare, cambia soltanto l'indice di iterazione in cui lo si conta. Se ricostruiamo la traiettoria unica a partire dal punto d'intersezione e la estendiamo verso valle, il numero totale di passi dispari e pari compiuti dalla coppia di orbite fino a qualsiasi termine comune successivo rimane invariato

rispetto alla sequenza canonica di Collatz. In altre parole, la "rimozione" apparente del passo dispari nel cambio di orbita è puramente una differenza di parametrizzazione temporale: il contributo al bilancio complessivo dei passi è conservato. Quindi in questa iterazione ***i*** si hanno due passaggi pari ($b_i = 2$) e nessun passaggio dispari ($a_i = 0$). Quindi la differenza $b_i - a_i = 2$ è aumentata di due unità rispetto alla situazione della iterazione precedente.

4. Caso h_0 pari

Se h_0 è pari non si verifica il cambio di orbita e la successione continua in modo canonico da N a $N[3] = 3h_0 + 1$ senza cambio di orbita in tre passi (D, P, P) e dove il numero iniziale della iterazione successiva è dispari quindi congruo 1 oppure 3 (mod4). Quindi in questa iterazione ***i*** si hanno due passaggi pari ($b_i = 2$) ed un passaggio dispari ($a_i = 1$). Quindi la differenza $b_i - a_i = 1$ è aumentata di una unità rispetto alla situazione della iterazione precedente. C.v.d.

Osservazione finale

Questa esplicitazione mostra chiaramente che nel caso $\boldsymbol{N \equiv 1(\mathrm{mod}4)}$ dove $N = 4h_0 + 1$ con h_0 dispari, la sostituzione di $3h_0 + 1$ nella iterazione con $h_0 = \frac{(3h_0+1)-1}{3}$ è la chiave dell'"eliminazione" apparente del passo dispari: esso non viene perso, ma semplicemente viene considerato come il primo passo dispari della traiettoria che parte da N' nella iterazione successiva. Per lo studio della convergenza di $N = 4h_0 + 1$ è quindi legittimo la sostituzione senza alterare il conteggio complessivo di passi dispari e pari.

Teorema 3.4 (quarto tipo, $\boldsymbol{N \equiv 3(\mathrm{mod}4)}$)

Sia $N = 4h_0 + 3$ che si scrive con $N = 2^p(1 + 2k) - 1$ con $p \geq 2$ e $k \geq 0$ (quindi $N \equiv 3(\mathrm{mod}4)$) in quanto precedente del numero $\boldsymbol{N + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}4)}$**)**. Allora, applicando la successione di Collatz:

1. dopo $2(p-1)$passaggi doppi si ottiene
$$N[2(p-1)] \;=\; 3^{\,p-1}\,2\,(1+2k) - 1;$$
2. questo termine è sempre congruo a $1(\mathrm{mod}4)$ e si può scrivere $N[2(p-1)] = 4h_1 + 1$ con
$$h_1 = \frac{3^{\,p-1}(1+2k) - 1}{2} \in \mathbb{N};$$
3. infine, se h_1è pari allora, per il **Teorema 3.3** , dopo 3 passaggi di cui uno dispari e 2 pari si ha
$$N[2p+1] = 3h_1 + 1,$$
mentre se h_1è dispari allora, per il **Teorema 3.3 ,** dopo 2 passaggi entrambi pari si ha
$$N[2p] = h_1.$$

Dimostrazione

(Parte 1 — passaggi doppi)

Partiamo da $N = 2^p(1 + 2k) - 1$. Poiché N è dispari applichiamo il cosiddetto *passaggio doppio* (applicare la regola dispari $3n + 1$ seguito dalla divisione per 2 quando possibile). Calcoliamo il primo doppio passo:
$$N[2] = \frac{3(2^p(1+2k) - 1) + 1}{2} = 3 \cdot 2^{p-1}(1+2k) - 1.$$

Il risultato è ancora dispari (la forma è $3 \cdot 2^{p-1}(1 + 2k) - 1$) quindi possiamo ripetere lo stesso ragionamento: ad ogni passaggio doppio l'esponente di 3 aumenta di 1 e l'esponente di 2 diminuisce di 1, mentre i fattori $(1 + 2k)$ e il termine -1 rimangono invariati. Iterando fino a che l'esponente del 2 diventi 1(cioé dopo $p - 1$ doppi passaggi) otteniamo:
$$N[2(p-1)] = 3^{\,p-1}\,2\,(1+2k) - 1,$$

che dimostra la parte (1).

(Parte 2 — congruenza modulo 4 e forma $4h_1 + 1$)

Consideriamo ora $M := N[2(p-1)] = 3^{\,p-1}\,2\,(1+2k) - 1$. Vogliamo stabilire la classe modulo 4 di M. Supponiamo per assurdo che $M \equiv 3(\mathrm{mod}4)$, cioè che esista h tale che $M = 4h + 3$. Allora

$$h = \frac{M-3}{4} = \frac{3^{p-1}\,2\,(1+2k)-4}{4} = \frac{3^{p-1}(1+2k)}{2} - 1.$$

Ma $3^{p-1}(1+2k)$ è prodotto di due dispari e quindi è dispari; pertanto la frazione $\frac{3^{p-1}(1+2k)}{2}$ non è intera, contraddicendo che h debba essere intero. Da qui M non è $\equiv 3(\mathrm{mod}4)$. Poiché M è dispari l'unica possibilità rimanente modulo 4 è $M \equiv 1(\mathrm{mod}4)$. Quindi esiste un intero h_1 con

$$M = 4h_1 + 1.$$

Calcoliamo esplicitamente h_1:

$$h_1 = \frac{M-1}{4} = \frac{3^{p-1}\,2\,(1+2k)-2}{4} = \frac{3^{p-1}(1+2k)-1}{2},$$

che è intero perché $3^{p-1}(1+2k)$ è dispari per cui sottraendo 1 diventa pari e divisibile per 2. Questo prova la parte (2).

(Parte 3 — cosa succede dopo: dipendenza dalla parità di h_1)

Ora applichiamo la regola di Collatz al termine $M = 4h_1 + 1$. Se M è scritto $4h_1 + 1$ allora il passo successivo (passaggio dispari) calcola $3M + 1 = 12h_1 + 4 = 4(3h_1 + 1)$; dividendo per 2 opportunamente secondo la sequenza di passi considerati si ha $M[3] = (3h_1 + 1)$ e di conseguenza si ottengono i due casi classici indicati nel **Teorema 3.3**:

- Se h_1 è **pari**, allora $h_1 = 2t$ e $M = 4(2t) + 1$. Applicando la regola dispari si ottiene $3M + 1 = 12(2t) + 4 = 4(6t + 1)$: seguendo la sequenza di divisioni per 2 prevista dai passaggi, il risultato utile che si ottiene dopo i passi indicati è

$$N[2p+1] = 3h_1 + 1.$$

(Questo corrisponde allo schema dato nella formulazione originale: se $h_1$pari -> $N[2p+1] = 3h_1 + 1$.)

- Se h_1 è **dispari**, allora si ha "cambio orbita" cioé si sostituisce nella successione personalizzata ad $N[2p+1] = 3h_1 + 1$ il numero $N[2p] = h_1$ con la decurtazione del primo passo dispari per cui si ha con soli 2 passaggi pari

$$N[2p] = h_1.$$

(Questo corrisponde allo schema originale: se $h_1$dispari -> $N[2p] = h_1$.)

Entrambe le conclusioni seguono dall'applicazione diretta della regola $3n + 1$seguita dalle divisioni per 2 finché possibile, osservando che la rappresentazione $M = 4h_1 + 1$ rende evidente la forma dei risultati successivi in funzione della parità di h_1. C.v.d.

Teorema 3.5 (prolungamento Teorema 3.4)

Questo teorema si applica nella successione personalizzata ad ogni numero iniziale della iterazione $\equiv 3\ (\mathbf{mod}4)$ e la rende più veloce)

Sia

$$N = 2^p(1+2k) - 1, p \geq 2, k \geq 0,$$

e sia, come nel teorema precedente **Teorema 3.4**,

$$M := N[2(p-1)] = 3^{p-1}\,2(1+2k) - 1.$$

Definiamo

$$h_1 := \frac{3^{p-1}(1+2k)-1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Allora:

1. $M \equiv 1(\mathrm{mod}4)$ e infatti $M = 4h_1 + 1$.
2. La parità di h_1 è determinata dalla parità di p e k:
   h_1 è **pari** se e solo se p e k hanno parità opposta;
   h_1 è **dispari** se e solo se p e k hanno la stessa parità.

3. Se h_1 è **pari**, si ottiene $N[\,2p+1\,]=3h_1+1$ e quindi $N[\,2p+1\,]=\frac{3^{\,p}(1+2k)-1}{2}$, per cui in questa iterazione ***i*** si hanno *p+1* passaggi pari ($b_i=p+1$) ed *p* passaggi dispari ($a_i=p$). Quindi la differenza $b_i-a_i=1$ è aumentata di una unità rispetto alla situazione della iterazione precedente.
4. Se h_1 è **dispari**, si ottiene $N[2p]=h_1=\frac{3^{\,p-1}(1+2k)-1}{2}$ ("cambio orbita") per cui in questa iterazione ***i*** si hanno *p+1* passaggi pari ($b_i=p+1$) ed *p-1* passaggi dispari ($a_i=p-1$). Quindi la differenza $b_i-a_i=2$ è aumentata di due unità rispetto alla situazione della iterazione precedente.

Dimostrazione:(1) e definizione di h_1.
Dal teorema precedente sappiamo

$$M=3^{\,p-1}\,2(1+2k)-1.$$

Scrivendo $M=4h_1+1$ otteniamo, come definizione,

$$h_1=\frac{M-1}{4}=\frac{3^{\,p-1}2(1+2k)-2}{4}=\frac{3^{\,p-1}(1+2k)-1}{2},$$

che è intero perché $3^{p-1}(1+2k)$ è dispari; quindi sottraendo 1 si ottiene un numero pari.
(2) parità di h_1.
Per determinare la parità di h_1 consideriamo $A:=3^{\,p-1}(1+2k)\ (\mathrm{mod}4)$. Poiché $3\equiv -1(\mathrm{mod}4)$abbiamo

$$3^{\,p-1}\equiv(-1)^{\,p-1}(\mathrm{mod}4),$$

cioè $3^{p-1}\equiv 1$ se p è dispari invece è $\equiv 3$ se p è pari. Inoltre, $1+2k\equiv 1$ se k è pari invece è $\equiv 3$ se k è dispari. Quindi il prodotto A vale 1 modulo 4 esattamente quando i due fattori hanno la stessa classe modulo 4 (cioè quando uno è 1 e l'altro è 1, oppure entrambi 3), e vale 3 modulo 4 negli altri casi.
Ora

$$h_1=\frac{A-1}{2}(\mathrm{mod}2)$$

e quindi:

- se $A\equiv 1(\mathrm{mod}4)$ allora $A-1\equiv 0(\mathrm{mod}4)$ e h_1 è pari;
- se $A\equiv 3(\mathrm{mod}4)$allora $A-1\equiv 2(\mathrm{mod}4)$ e h_1 è dispari.

Dalle varie possibili combinazioni si ottiene che $\boldsymbol{h_1}$ **è pari se** $\boldsymbol{p}$ **e** $\boldsymbol{k}$ **hanno parità opposta** mentre $\boldsymbol{h_1}$ **è dispari se** $\boldsymbol{p}$ **e** $\boldsymbol{k}$ **hanno la stessa parità**. Questo prova (2).
(3) caso $h_1$pari.
Se h_1 è pari allora applicando la regola dispari a $M=4h_1+1$:

$$3M+1=12h_1+4=4(3h_1+1).$$

Questa quantità è divisibile per 4; effettuando due divisioni successive per 2 si ottiene

$$\frac{4(3h_1+1)}{4}=3h_1+1.$$

Calcolando $3h_1+1$ con l'espressione di h_1 si ha

$$N[\,2p+1\,]=3h_1+1=3\cdot\frac{3^{\,p-1}(1+2k)-1}{2}+1=\frac{3^{\,p}(1+2k)-1}{2},$$

ossia l'enunciato del punto (3) per cui se all'inizio della iterazione ***i*** si ha un numero

$$N=2^p(1+2k)-1, p\geq 2, k\geq 0,$$

con ***p*** **e** ***k*** **aventi parità diversa** il numero iniziale della iterazione successiva ***i+1*** è

$$N[\,2p+1\,]=\frac{3^{\,p}(1+2k)-1}{2}$$

Conto dei passi: fino a M si erano fatti $p-1$ passi dispari e $p-1$ passi pari (i $2(p-1)$ "passaggi doppi"); dalla trasformazione di M a $3h_1+1$ si aggiungono 1 passo dispari (l'applicazione $3n+1$) e 2

passi pari (le due divisioni per 2), quindi il totale diventa p passi dispari e $p+1$ passi pari. Quindi la differenza $b_i - a_i = 1$ è aumentata in questa iterazione ***i*** di una unità rispetto alla situazione della iterazione precedente.

(4) caso h_1 dispari

Se h_1 è dispari in base al **Teorema 3.3** si ha "cambio orbita" per cui si sostituisce al numero $N[\,2p+1\,] = 3h_1 + 1$ il numero $N[\,2p\,] = h_1 = \frac{3^{p-1}(1+2k)-1}{2}$ decurtato di un passaggio dispari e questo numero diventa il numero iniziale della iterazione successiva ossia si è verificato l'enunciato del punto (4). Per cui se all'inizio della iterazione ***i*** si ha un numero

$$N = 2^p(1+2k) - 1, p \geq 2, k \geq 0,$$

con ***p*** **e** ***k*** **aventi la stessa parità** il numero iniziale della iterazione successiva ***i+1*** è

$$N[\,2p\,] = \frac{3^{p-1}(1+2k)-1}{2}.$$

Conto dei passi: fino a M si erano fatti $p-1$ passi dispari e $p-1$ passi pari (i $2(p-1)$ "passaggi doppi"); dal "cambio orbita" da $3h_1 + 1$ a h_1 si aggiungono solo i 2 passi pari, quindi il totale diventa $p-1$ passi dispari e $p+1$ passi pari. Quindi la differenza $b_i - a_i = 2$ è aumentata in questa iterazione ***i*** di due unità rispetto alla situazione della iterazione precedente. C.v.d.

Dai teoremi precedenti risulta che in questa successione personalizzata sono vere le seguenti affermazioni:

A. i casi eccezionali verificano la congettura;
B. la trasformazione dei numeri in ogni iterazione segue fedelmente solo uno dei casi sopra descritti nei teoremi precedenti in base al numero iniziale di ogni iterazione;
C. sin dalla prima iterazione il totale dei passaggi pari (che indico con b) è sempre maggiore del totale dei passaggi dispari (che indico con a) cioè si ha b > a e nelle iterazioni successive si ha che b aumenta più di a ;
D. la differenza tra il totale dei passaggi pari ed il totale dei passaggi dispari aumenta sempre di 1 oppure di 2 unità in ogni iterazione centrale che ha come numero iniziale della stessa un numero congruo 1 oppure 3 modulo 4 e questo produce nelle iterazioni successive una differenza tra b e a che aumenta sempre;
E. il valore dei numeri iniziali congrui 1 modulo 4 in ogni iterazione diminuisce mentre i congrui 3 modulo 4 aumentano il loro valore nella maggior parte dei casi.

Costruzione della spezzata aperta e semplice ottenuta dai risultati della successione personalizzata

Definizioni preliminari

Sia *N* un intero positivo e consideriamo la successione (a_i, b_i) generata dalla successione personalizzata formata da soli numeri dispari congrui 1 oppure 3 modulo 4:

- a_i è il numero totale di passi dispari effettuati fino all'iterazione *i* compresa;
- b_i è il numero totale di passi pari effettuati fino all'iterazione *i* compresa;
- La differenza $b_i - a_i$ è la loro differenza all'iterazione *i* la quale cresce sempre ad ogni iterazione di 1 oppure 2 unità.

Definiamo la spezzata nel piano cartesiano formata dai segmenti che collegano i punti

$$P_{i-1} = (a_{i-1}, b_{i-1} - a_{i-1}) \text{ con } P_i = (a_i, b_i - a_i), \forall i \geq 1$$

ottenuti nella successione personalizzata avente punto iniziale

$$P = (0,0).$$

4. Quando N converge ad 1

Definizione.

Sia $N \in \mathbb{N}$ il numero iniziale della successione personalizzata.

Ad ogni iterazione $i \geq 1$ sono associati due numeri interi (a_i, b_i) tali che:

$$b_i > a_i \forall i$$

e la convergenza di *N* a 1avviene quando, per un certo indice s, risulta:

$$\frac{3^{a_s} N}{2^{b_s}} < 1.$$

Passaggio ai logaritmi.

La disuguaglianza è equivalente a:

$$a_s \log(3) - b_s \log(2) + \log(N) < 0,$$

da cui si ottengono le due condizioni:

$$b_s > a_s \frac{\log(3)}{\log(2)} + \log_2(N),$$

$$b_s - a_s > a_s \frac{\log(3/2)}{\log(2)} + \log_2(N).$$

Valori approssimati.

Poiché

$$\frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1.5849625, \frac{\log(3/2)}{\log(2)} \approx 0.5849625,$$

segue che:

$$b_s > a_s \cdot 1.5849625 + \log_2(N),$$
$$b_s - a_s > a_s \cdot 0.5849625 + \log_2(N).$$

Arrotondamento.

Essendo $b_s, b_s - a_s \in \mathbb{N}$, si definisce l'arrotondamento all'intero superiore:

$$b_s = \lceil a_s \cdot 1.5849625 + \log_2(N) \rceil,$$
$$b_s - a_s = \lceil a_s \cdot 0.5849625 + \log_2(N) \rceil.$$

Funzione discreta associata alla convergenza di N ad 1 .

Definiamo la funzione discreta:

$$f(a_i) = \lceil a_i \cdot 0.5849625 + \log_2(N) \rceil,$$

che rappresenta la "crescita discreta" dei valori $b_i - a_i$ ed è la condizione che verifica la convergenza di *N* ad 1 per un particolare valore di a_i.

Rappresentazione geometrica.

Nel piano cartesiano consideriamo la retta:

$$y = a_i \cdot 0.5849625 + \log_2(N),$$

con coefficiente angolare

$$m = 0.5849625,$$

e intercetta

$$Q = (0, \log_2(N)).$$

Il grafico della funzione discreta f è una **spezzata crescente aperta e semplice**, ha un andamento simile alla retta crescente y formata da segmenti che congiungono i punti:

$$Q_{i-1} = \left(a_{i-1}, f(a_{i-1})\right) \text{ con } Q_i = (a_i, f(a_i)), \forall i \geq 1.$$

5. Dimostrazione formale dell'intersezione tra le due spezzate

Definizioni preliminari

Sia *N* un intero positivo. Consideriamo una successione (a_i, b_i) generata da un processo iterativo (successione di Collatz personalizzata), equivalente alla successione di Collatz, dove:

- a_i è il numero totale di passi dispari effettuati fino all'iterazione *i* compresa;
- b_i è il numero totale di passi pari effettuati fino all'iterazione *i* compresa;
- La differenza $b_i - a_i$ cresce sempre ad ogni iterazione di 1 oppure 2 unità.

Definiamo due spezzate nel piano cartesiano:

- **Spezzata 1 ottenuta dalla successione personalizzata**: (a_i, $b_i - a_i$) con punto iniziale (0, 0)
- **Spezzata 2**: (a_i, $f(a_i)$) con punto iniziale (0, $\log_2(N)$), definita da: $f(a_i) = \lceil a_i \cdot \lambda + \log_2(N) \rceil$ dove $\lambda = \log_2(3) \approx 0{,}5849625$ e $f(a_i)$ viene arrotondato al numero intero positivo successivo.

Teorema dell'intersezione tra due spezzate

Per ogni intero positivo N, esiste almeno una iterazione s tale che: $b_s - a_s = f(a_s)$ cioè, le due spezzate si intersecano nel punto: $(a_s, f(a_s)) = (a_s, b_s - a_s)$

Dimostrazione

1 **Crescita delle funzioni**

- I valori di a_i non decrescono nelle iterazioni successive.
- La funzione $f(a_i)$ è strettamente crescente rispetto ad a_i, essendo somma di una funzione lineare strettamente crescente con inclinazione $\lambda = \log_2(3) \approx 0{,}5849625$ e una costante $\log_2(N)$.
- La differenza $b_i - a_i$ cresce sempre ad ogni iterazione di 1 oppure 2 unità.

2 **Comportamento discreto**

- Entrambe le spezzate sono definite su insiemi discreti.
- Poiché $f(a_i)$ cresce linearmente e $b_i - a_i$ cresce più rapidamente (**in media**), esiste almeno un punto in cui le due funzioni coincidono.

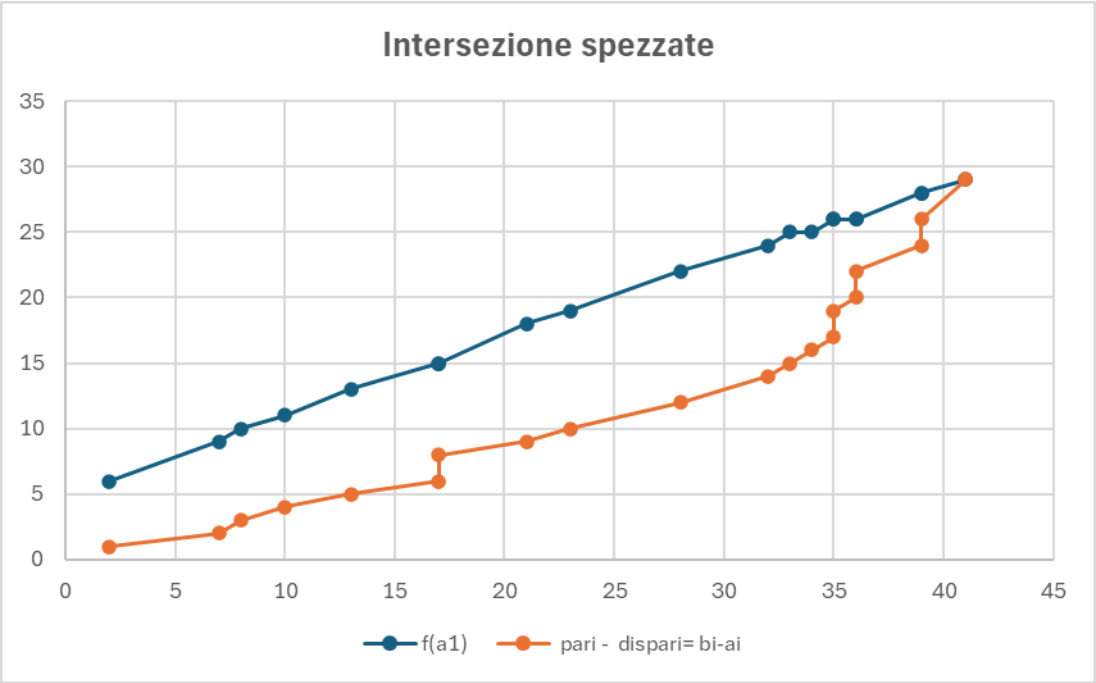
3 **Principio del confronto discreto**

- Inizialmente: $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, quindi $b_0 - a_0 = 0$
- Ma $f(a_0) = \lceil \log_2(N) \rceil > 0$, quindi $b_0 - a_0 < f(a_0)$
- Allora, per la monotonicità delle due funzioni, esiste un primo indice s tale che:

$$\boldsymbol{b_s - a_s = f(a_s)} \quad \textbf{c.v.d.}$$

Esempio concreto: $N = 27$

Iterazioni	step =Dispari + Pari	N	Tipo di N e sua trasformazione successiva	1+2*k	k dispari o pari	Dispari	Pari	Pari-Dispari	Valore di f(a_i) arrotondato
0		27							
1	5	31	4*h0+3-->3*h1+1	7	3	2	3	1	6
2	16	121	4*h0+3-->3*h1+1	1	0	7	9	2	9
3	19	91	4*h0+1-->3*h0+1			8	11	3	10
4	24	103	4*h0+3-->3*h1+1	23	11	10	14	4	11
5	31	175	4*h0+3-->3*h1+1	13	6	13	18	5	13
6	40	445	4*h0+3-->3*h1+1	11	5	17	23	6	15
7	42	111	4*h0+1-->h0			17	25	8	15
8	51	283	4*h0+3-->3*h1+1	7	3	21	30	9	18
9	56	319	4*h0+3-->3*h1+1	71	35	23	33	10	19
10	68	607	4*h0+3-->h1	5	2	28	40	12	22
11	78	769	4*h0+3-->h1	19	9	32	46	14	24
12	81	577	4*h0+1-->3*h0+1			33	48	15	25
13	84	433	4*h0+1-->3*h0+1			34	50	16	25
14	87	325	4*h0+1-->3*h0+1			35	52	17	26
15	89	81	4*h0+1-->h0			35	54	19	26
16	92	61	4*h0+1-->3*h0+1			36	56	20	26
17	94	15	4*h0+1-->h0			36	58	22	26
18	102	13	4*h0+3-->h1	1	0	39	63	24	28
19	104	3	4*h0+1-->h0			39	65	26	28
20	111	1	N=3			41	70	29	29



Dalla Tabella della successione personalizzata di N = 27 e dal grafico precedente si osserva che:

- In ogni iterazione ***i*** precedente a ***s*** (***i*** < ***s***), si ha la seguente disuguaglianza: $\boldsymbol{b_i - a_i < f(a_i)}$
- alla iterazione ***s*** = 20 : si ha $a_s = 41$ $b_s = 70$ $b_s - a_s = 29$ $f(a_s) = [41 \cdot 0{,}5849625 + \log_2(27)] =$ $[23{,}9834625 + 4{,}7548875] = [28{,}73835\ldots] = 29$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{b_s - a_s = f(a_s)} \Rightarrow$ **intersezione nel punto (41;29)**

Il punto di intersezione tra le due spezzate rappresenta un equilibrio tra la crescita empirica della successione e la stima teorica fornita dalla funzione $f(a_i)$. Questo punto può essere interpretato come una soglia in cui la complessità iterativa coincide con la previsione logaritmica.

6. Interpretazione dei risultati

Dall'applicazione della successione di Collatz personalizzata rispetto a quella canonica emerge una differenza significativa nel numero di iterazioni. Questa riduzione è frutto di una gestione ottimizzata delle traiettorie, basata su:

- **Classificazione modulo 4**, che permette di individuare subito il tipo di orbita da applicare;
- **Eliminazione dei passaggi pari intermedi**, che nella successione canonica rallentano il percorso verso l'unita` ;
- **Utilizzo del concetto di isopath**, che consente di sostituire gruppi di numeri con equivalenti più semplici senza perdere informazioni strutturali.

Inoltre, la differenza crescente tra il numero totale di passaggi pari e dispari dimostra una tendenza strutturale che favorisce la convergenza: l'incremento costante di 1 oppure 2 unità di $b_i - a_i$ per ogni iterazione i non solo velocizza il processo, ma suggerisce che l'accelerazione è sistemica e non casuale. Questo porta sicuramente ai valori a_s e $b_s - a_s$ per cui le due spezzate si incontrano, e quindi il numero iniziale N converge a 1 nell'iterazione s.

7.Conclusioni

Se la successione personalizzata mantiene questa efficienza per valori arbitrari di N, si aprono nuovi scenari per una dimostrazione costruttiva della congettura di Collatz, fondata su criteri combinatori e modulari. In particolare, l'approccio evidenzia come l'informazione racchiusa nei numeri congrui a 1 e 3 (mod 4) sia sufficiente per descrivere l'intera dinamica della congettura.

La successione di Collatz personalizzata non è solo una semplificazione operativa, ma una potenziale chiave teorica per affrontare uno dei problemi aperti più famosi della matematica elementare.

Questo modo di procedere nella successione personalizzata porta agli stessi risultati della successione di Collatz canonica e non dipende dal numero iniziale, in quanto essa si applica allo stesso modo e porta agli stessi risultati sia su numeri interi con poche cifre che su numeri interi con un numero illimitato di cifre.
Sono state svolte molte prove su numeri diversi, contenenti anche un numero di cifre numerose, usando un programma in Python di mia creazione che segue fedelmente la mia successione personalizzata. I test effettuati su numeri con moltissime cifre hanno confermato la veridicità della congettura.

8. Riferimenti

- Collatz, L. (1937). *On an unsolved problem in elementary number theory.*
- Lagarias, J. C. (1985). *The 3x+1 problem and its generalizations*.
- Eric Roosendaal, Sul http://www.ericr.nl/wondrous/index.html problema 3x + 1,
- Wei Ren, Simin Li, Ruiyang Xiao e Wei Bi, La congettura di Collatz per 2100000 −1 è vera- Algoritmi per la verifica di numeri estremamente grandi, Proc. di IEEE UIC, ottobre 2018, Guangzhou, Cina, 411-416, 2018